Blwyddyn 13

BRHubbard

Y GYFADRAN FATHEMATEG, YSGOL MAES Y GWENDRAETH

mathsmaesygwendraeth.weebly.com

@mathsMAESygwen

Adolygu Pur

Uned : C3

**Cynnwys:**

1. Trawsffurfiadau Graffiau
2. Modwlws
3. Y Ffwythiant Esbonyddol
4. Ffwythiannau
5. Differu
6. Trigonomtreg
7. Differu ymhlyg parametrig
8. Integru
9. Profi
10. Dulliau Rhifiadol
11. Rheol Simpson

**1 : Trawsffurfiadau graffiau**

Dyma’r mathau sylfaenol o drawsffurfiadau :

f(x + a) trawsfudiad llorweddol o -a

f(x) + a trawsfudiad fertigol o +a

f(ax) ymestyniad llorweddol, ffactor graddfa 1/a

 (h.y. rhannu pob cyfesuryn x gyda gwerth a)

af(x) ymestyniad fertigol, ffactor graddfa a

 (h.y. lluosi pob cyfesuryn y gyda gwerth a)

Gellir cyfuno rhain i roi, e.e. 3 f(x + 5) : symud y graff yn llorweddol –5 uned wedi ei ddilyn gan ymestyniad fertigol gan luosi cyfesuryn y â 3.

Adeiladwn y graff “un cam ar y tro”, gan ddechrau â chromlin penodol.

**Cwestiynau cyn bapur**

**Haf 2006**

**1.** O wybod bod f (x) = ex, brasluniwch, ar yr un diagram, graffiau y = f(x) ac y = 2f(x) – 1. Labelwch gyfesurynnau’r croestorfannau â’r echelin-y a dangoswch beth yw ffurf y graffiau ar gyfer gwerthoedd x sy’n fawr a phositif a mawr a negatif.

**Ion 2007**

**2.** Mae’r diagram isod yn dangos braslun o graff y = f (x). Mae’r graff yn mynd trwy’r tarddbwynt a’r pwynt (–2, 0), ac mae ganddo bwynt minimwm yn (–1, –2).



(a) Brasluniwch graff y = 2f (x – 3). Nodwch gyfesurynnau’r pwynt arhosol a’r pwyntiau lle mae’r graff yn croesi’r echelin-x. [3]

(b) Ar ddiagram gwahanol, brasluniwch graff y = – f (x) + 1. Nodwch gyfesurynnau’r pwynt arhosol a chyfesurynnau’r pwynt lle mae’r graff yn croesi’r echelin-y. [3]

**Ion 2008**

**3**. Mae’r diagram yn dangos graff y = f (x). Pwynt uchaf y graff yw (4, 2) ac mae’r graff yn

croestorri’r echelin-x yn y pwyntiau (0, 0) ac (8, 0).



**(a)** Brasluniwch graff y = 2f (x + 3), gan nodi cyfesurynnau’r pwynt uchaf a’r pwyntiau lle mae’r graff yn croestorri’r echelin-x. [3]

**(b)** Ar ddiagram gwahanol, brasluniwch graff y = f (2x) + 1, gan nodi cyfesurynnau’r pwynt

uchaf a’r pwynt lle mae’r graff yn croestorri’r echelin-y. [3]

**Haf 08**

**4.** **(a)** Mae’r diagram yn dangos graff y = f(x). Mae gan y graff bwynt arhosol yn (0, –4) ac mae’n croestorri’r echelin–x yn y pwyntiau (–2, 0) a (2, 0).



Brasluniwch graff y = 3f (x – 1), gan nodi cyfesurynnau’r pwynt arhosol a’r pwyntiau lle mae’r graff yn croesi’r echelin–x. [3]

**Ion 2009**

**5.** O wybod bod f (x) = lnx, brasluniwch, ar yr un diagram, graffiau y = f (x) ac y = –f (x + 1).

Labelwch gyfesurynnau’r croestorfannau â’r echelin-x a dangoswch beth yw ffurf y graffiau ar gyfer gwerthoedd y sy’n fawr a phositif a mawr a negatif.

**Haf 2009**

**6.**



Mae’r diagram yn dangos braslun o graff y = f (x). Pwynt uchaf y graff yw

(2, 3) ac mae’r graff yn croestorri’r echelin-x yn y pwyntiau (–1, 0) a (4, 0). Brasluniwch graff y = 3f (x – 2), gan nodi cyfesurynnau tri phwynt ar y graff. [3]

**2 : Modwlws**

Modwlws rhif ***a***, a ysgrifennir yn y ffurf |***a***| , yw ei werth rhifiadol positif.

Felly, |3| = 3 yn ogystal â |-3| = 3

Os gofynnir i ni ddatrys yr hafaliad |x| = 5 bydd dau ateb posibl:

 x = 5 a x = -5

**Datrys Hafaliadau anoddach sy’n cynnwys modwlws**

Os yw ein hafaliad yn cynnwys un neu fwy o dermau |x| , yna byddwn yn ei ddatrys fel arfer hyd y byddwn yn cyrraedd : |x| = rhif.

Byddwn wedyn yn nodi’r ddau ateb posibl ar gyfer x (yr un + a’r un -)

**Braslunio graffiau y = |f(x)|**

* Brasluniwch graff y = f(x)
* Adlewyrchwch yn echelin x unrhyw rannau islaw echelin x
* Dilëwch y rhannau sydd islaw echelin x.

**Cwestiynau Cyn bapur**

**Ionawr 2006**

1. (a) Datryswch yr anhafaledd | 3x – 8 | ≤ 5. [3]

(b) O wybod bod f (x) = | x |, brasluniwch graff y = f (x).

Ar yr un diagram, brasluniwch graff y = f (x + 2) + 1, gan ddangos ei safle. [4]

**Haf 2006**

2. Datryswch y canlynol.

(a) 3|x| + 4 = 6 – 2|x| [2]

(b) |7x – 5| ≥ 3 [3]

**Haf 2007**

3. (a) Brasluniwch graffiau y = x 2 – 4 ac y = | x² – 4 |, gan nodi’r pwyntiau lle mae’r graffiau’n cyfarfod â’r echelin-x a’r echelin-y. [4]

(b) Datryswch yr anhafaledd | 5x – 3 | > 4. [3]

**Ionawr 2008**

4. (a) (i) Brasluniwch graff y = lnx.

(ii) Ar ddiagram gwahanol, brasluniwch graff y = | lnx |. [4]

(b) Datryswch | 3x – 2 | < 4. [4]

**Haf 2008**

5. (b) Datryswch 3|x| + 1 = 2 – |x|. [2]

(c) Datryswch |2x – 9 | > 3. [4]

**Ionawr 2009**

6. Datryswch y canlynol.

(a) 2 |x| + 9 = 5

 | x | + 1 [2]

(b) | 5x + 7 | ≤ 4 [3]

**Haf 2009**

7. Datryswch y canlynol.

(a) |9x – 7| ≤ 3 [3]

(b) √5 |x| + 1 = 3 [2]

**3. Y Ffwythiant Esbonyddol - Crynodeb**

**Pwerau a Logarithmau**

Yn ein astudiaethau Mathemategol rydym wedi dod ar draws y ffwythiant y = ax. Enghreifftiau o hyn yw y = 10x , y = 2x ayyb.

Yn C2, dysgom fel y defnyddir Logarithmau er mwyn symleiddio rhai ffwythiannau sy’n cynnwys pwerau a datrys hafaliadau ble mae x yn bŵer.

Os yw ax = c yna bydd Loga c = x. (Gan ddefnyddio rhifau, mae 102 = 100 felly log10 100 = 2)

**Y ffwythiant esbonyddol**

Pan y byddwn yn differu y ffwythiant y = ax , bydd yr ateb bob amser yn y ffurf:

 dy = c. ax h.y. mae’r ateb yn rhyw rif wedi ei luosi gyda’r ffwythiant gwreiddiol) dx Mae’r gwerth ‘c’ hwn yn ddibynnol ar y gwerth o ‘a’. (Nid oes yn rhaid

i ni ddeall y broses o ddarganfod gwerth ‘c’)

Mae rhai gwerthoedd o ‘c’ ar gyfer gwerthoedd penodol o ‘c’ wedi eu rhoi yn y tabl canlynol:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f(x) | gwerth ‘a’ | gwerth ‘c’ | f’(x) |
| y = 1x  | 1 | 0 |  = 0 |
| y = 2x | 2 | 0.69 |  = 0.69(2x) |
| y = 3x | 3 | 1.10 |  = 1.10(3x) |
| y = 4x | 4 | 1.39 |  = 1.39(4x) |

Dylech sylwi bod rhwng 2 a 3, mae yna werth o ‘a’ sydd yn rhoi = 1 (ax).

Y rhif hwn yn ‘e’ ac mae ei werth i 6 lle degol yn hafal i 2.718282. Mae’n rhif anghymarebol fel π felly ni allwn ei ysgrifennu fel rhif. Mae gwerth ‘e’ wedi ei raglennu mewn i gyfrifianellau.

Y ffwythiant esbonyddol y = ex yw’r ffwythiant ble mae’r graddiant yn unfath â’r ffwythiant

 Ar gyfer y ffwythiant y = ex ;  = ex lle mae e = 2.718......

Mae’r canfyddiad hwn yn hynod bwysig mewn Mathemateg. Gan gofio bod  yn mesur ar ba gyfradd mae ‘ y ’ yn newid yn ôl ‘ x ’, mae’n gallu bod yn hynod ddefnyddiol wrth ddefnyddio ffwythiannau mathemategol i fodelu sefyllfaoedd mewn natur i gael ffwythiant sydd ddim yn newid wrth ei ddifferu.

Gellir defnyddio’r ffwythiant esbonyddol i fodelu llawer o bethau a dyma rai enghreifftiau:

* Modelu fel mae car yn dibrisio gydag amser.
* Modelu twf poblogaeth
* Modelu fel mae sylwedd ymbelydrol yn colli ei nerth gydag amser.

**Y Ffwythiant ln x**

Mae ln yn ffordd fer o ysgrifennu loge x. Felly i ddehongli ln 6, byddem yn meddwl e? = 6 (2.718... i bŵer beth fyddai’n rhoi 6). Mae botwm ln x ar eich cyfrifiannell a thrwy ddefnyddio’r botwm hwn byddai ln 6 = 1.7917...

Mae ln x ac ex yn brosesau gwrthdro i’w gilydd (fel +/- neu sgwario / ail-isradd).

**Enghreifftiau**

**1.** Datryswch yr hafaliad e3x-4 = 25 gan roi eich datrysiad yn nhermau ln 5.

Ateb: e3x-4 = 25

 e3x-4 = 52

 ln(e3x-4) = ln52

 3x – 4 = 2ln5

 3x = 2ln5 + 4

 x = 2ln5 + 4

 3

**2.** Datryswch yr hafaliad e2x = ¼ gan roi eich datrysiad yn nhermau ln 2.

 e2x = ¼

 e2x = 2-2

 ln(e2x) = ln2-2

 2x = -2ln2

 x = -ln 2

**4. Ffwythiannau : Crynodeb**

**Beth yw ffwythiant**

Ffwythiant yw pan fydd gweithrediad gennych (gwneud rhywbeth i x i gael f(x)) sydd yn sefyllfa un i un neu llawer i un. Rhaid bod pob gwerth o x yn gallu cael ei fapio.

**Parth ac Amrediad**

Parth yw’r rhifau x y byddwch yn rhoi i mewn yn y ffwythiant.

Amrediad yw’r atebion (gwerthoedd f(x)).

Pan fydd parth yn cael ei roi i chi ac mae disgwyl i chi ddarganfod yr amrediad, cyfrifwch werth f(x) ar gyfer ffiniau’r parth (os nad yw’n bosibl cyfrifo ar gyfer ffin, cyfrifwch f(x) ar gyfer x sy’n agos iawn i’r ffin). Yn y mwyafrif o sefyllfaoedd bydd hyn yn rhoi ffiniau’r amrediad i chi. Lluniwch fraslun o’r ffwythiant i wirio eich ateb.

ee Mae’r ffwythiant f wedi ei ddiffinio gan f(x) = ln (2x – 4) ac mae gan f barth (2, ∞).

 Darganfyddwch amrediad f

Ateb: Ffin isaf y parth yw 2 felly f(2) = ln (2 x 2 – 4)

 = ln 0.

 Nid yw ln 0 yn bosibl ond byddai ln 0.00001 yn -11.51... felly gellir tybio mai ln 0 yw -∞.

 Ffin uchaf y parth yw ∞. Ar gyfer darganfod ln (2 x ∞ - 4), darganfyddwn ln o rif mawr

 iawn ee ln 10000011.51.... Gellir tybio bod wrth i ein gwerth agosáu at ∞ bydd ln ∞

 hefyd yn agosáu at ∞. (Gallech fod wedi darganfod yr amrediad hefyd trwy lunio graff)

 Felly’r amrediad yw (-∞ , ∞).



(Noder: Nid yw’r dull hwn yn gweithio bob tro. Ystyriwch yr enghraifft g(x) = x2 ar gyfer y parth [-3 , 7]. f(-3) = -32 = 9 ; f(7) = 72 = 49. Mae hyn yn awgrymu mai ein amrediad yw [9, 49] ond nid yw hyn yn gywir. Gwyddom mai gwerth lleiaf g(x) = x2 a gan fod 0 o fewn y parth, yr amrediad cywir yw [0, 49]. Nid yw cwestiynau fel hyn sydd yn ceisio ei dal chi mas fel arfer yn cael eu gosod yn yr arholiadau!).

**Ffwythiant gwrthdro**

Er mwyn darganfod y ffwythiant gwrthdro,

* Newidiwch yr f(x) i ‘ y ’.
* Aildrefnwch i gael x yn destun.
* Ail ysgrifennwch eich ateb yn y ffurf f-1(x) = ........ gan newid yr a oedd yn eich ateb yn ôl i ‘x’.

Os y gofynnir i chi am barth ac amrediad y ffwythiant gwrthdro, darganfyddwch amrediad f(x) ac yna defnyddiwch y ffaith ganlynol:

 Parth f(x) = Amrediad f-1(x)

 Amrediad f(x) = Parth f-1(x)

Edrychwch trwy’r enghreifftiau sydd yn eich nodiadau.

**Graff ffwythiant gwrthdro.**

Er mwyn llunio graff o ffwythiant gwrthdro:

* Dechreuwch trwy wneud braslun o y= f(x).
* Lluniwch y llinell y = x ac adlewyrchwch eich graff o y = f(x) yn y llinell honno. (Gallwch ddefnyddio papur dargopïo os ydych am)

Enghraifft: O wybod bod f(x) = x2 + 3 gyda parth [0, ∞), ar yr un echelinau, brasluniwch graffiau y = f(x) a y = f-1(x).



Ateb: Lluniwn y graff o y = x2 + 3 (ond nid y darn i’r chwith o’r echelin y gan nad yw yn y parth. Yna llunio y = x, ac adlewyrchu’r graff yn y llinell).

**Cyfuno Ffwythiannau**

Weithiau gellir cyfuno ffwythiannau trwy roi ateb un ffwythiant mewn i ffwythiant arall. Gelwir ffwythiant o’r math hwn yn ffwythiant cyfansawdd.

* Ystyr fg(x) yw f[g(x)], h.y. rydych yn gwneud y ffwythiant g i’r x ac yna yn gwneud y ffwythiant f i’r ateb a gawsoch.
* Os ydych am ddarganfod y ffwythiant fg(x), amnewidiwch g(x) i mewn yn lle x yn f(x). Os ydych am ddarganfod gf(x) rhowch f(x) i mewn yn lle x yn g(x).
* Parth fg(x) yw parth g(x) gan mai g(x) yw beth y byddech yn dechrau gyda.
* I ddarganfod amrediad fg(x) cyfrifwch y gwerthoedd ffiniol ar gyfer fg(x) a gwiriwch gyda braslun o’r graff.

**Datrys hafaliadau pan fo ffwythiant wedi ei ddiffinio.**

Pan fyddwch yn datrys hafaliad i ddarganfod gwerth (neu gwerthoedd) x, gwiriwch a yw bob gwerth o x tu fewn i’r parth. Os nad yw, nid yw’n ddatrysiad i’r hafaliad.

Enghraifft: Mae gan y ffwythiant f barth [-1, ∞) ac fe’i diffinnir gan f(x) = x2.

 Datryswch yr hafaliad f(x) = 5x + 24

Ateb: x2 = 5x + 24

 x2 – 5x - 24 = 0

 (x – 8)(x + 3) = 0

 x – 8 = 0 ; x + 3 = 0

 x = 8 ; x = -3

 Nid yw -3 yn y parth felly ein datrysiad yw x = 8.

**Ystyr f’(x)**

Dylech gofio o’r gwaith C1 mai ystyr f’(x) yw differiad f(x).

Enghraifft: O wybod bod f(x) = 3x2, darganfyddwch f’(x) .

Trwy ddifferu 3x2, cawn f’(x) = 6x

**5 : Differu**

Yn yr uned hon dysgom sut i ddifferu ffwythiannau mwy cymhleth.

Mae’n rhaid gwybod a deall sut i ddefnyddio’r rheolau differu canlynol :

Os yw y = axn  = anxn-1 RHEOL I

e.e. y = 3x-5 y = ⅜x¾ - 7x-¼ y = √x

 dy = -15x-6 dy = 9x-¼ + 7x-5/4 dy = ½x-½

 dx dx 32 4 dx

Os yw y = f[g(x)], yna  = f’[g(x)].g’(x). RHEOL II

e.e. y = (4x2 + 7x)4 y = \_\_1\_\_ , y = (6x – 3)-1/2

 √6x - 3

 dy = 4(4x2 + 7x)(8x + 7) dy = -1/2(6x – 3)-3/2 X 6

 dx dx

 dy = -3(6x – 3)-3/2

 dx

Os yw x = f(y) yna  =  RHEOL III

Os yw y = uv yna mae = v+ u neu = u + v RHEOL IV

e.e. Differwch y = (2x + 4)(3x2 + 7x) Peidiwch a lluosi’r cromfachau mas yn gyntaf.

Ateb: y = (2x + 4)(3x2 + 7x) = v+ u

 u = 2x + 4,  = 2 = (3x² + 7x)(2) + (2x + 4)(6x + 7)

 v = 3x2 + 7x  = 6x + 7 = 6x2 + 14x + 12x2 + 14x + 24x + 28

 = 18x2 + 52x + 28

Os yw y =  yna mae =  RHEOL V

e.e. Differwch y = \_\_\_x\_\_ Gadewch i u = x a v = 2x + 5

 2x + 5 Felly, du = 1 dv = 2

 dx dx

 dy = (2x + 5) X 1 - (x X 2)

 dx (2x + 5)²

 dy = \_\_\_5\_\_\_

 dx (2x + 5)²

Os yw y = ex = ex RHEOL VI

e.e. y = 10ex y = e7x - 2

 dy = 10ex dy = 7e7x - 2

 dx dx

Os yw y = ln x =  RHEOL VII

e.e. y = 5 lnx y = ln(7x + 4)

 dy = 5 dy = \_\_7\_\_\_

 dx x dx 7x + 4

**Differu sinx, cos x a tan x**

 Os yw y = sinx  = cosx RHEOL I

 Os yw y = cos x = -sin x RHEOL II

 Os yw y = tan x = sec2x RHEOL III

e.e.

y = sin 4x y = sin²x y = cos(4x – 3) y = tan4x

 y = (sin x)² y = (tan x)4

dy = 4 cos 4x dy = 2 sinx cosx dy = -4 sin(4x – 3) dy = 4 (tan x)3 sec2x

dx dx dx dx

**Differu sec x, cosec x a cot x**

 Os yw y = cosecx  = -cosecx cot x RHEOL IV

 Os yw y = sec x = sec x tan x RHEOL V

 Os yw y = cot x = -cosec2x RHEOL VI

**Differu sin-1 x**

  = 

**Differu cos-1 x**  = – 

**Differu tan-1 x**  = 

Mae’r tri deilliad uchod i’w cael yn y llyfryn fformwla, er y byddai’n syniad da i chi eu dysgu.

**Cwestiynau cyn bapur**

**Ionawr 2006**

**1. (a)** Dangoswch fod gan 2 tan–1x – 6ln(1 + x2) – 4x2 werth arhosol pan fydd x yn bodloni

4x3 + 10x – 1 = 0. [5]

**2.** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, gan symleiddio eich ateb pan fydd hyn yn bosibl.

**(a)** e3xcosx [3]

**(b)**  [3]

**(c)** tan (5x 2 + 3) [2]

**(ch)** ln(2x) [2]

**(d)** sin–1(3x). [2]

**Haf 2006**

**3. (a)** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x.

(i) tan–14x (ii) ln(1+x2) (iii) x2e3x [7]

**(b)** Trwy yn gyntaf ysgrifennu cot x = cos x, dangoswch fod

 sin x

(cot x) = –cosec2x. [3]

**Ionawr 2007**

**4.** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(a) (1 + 2x)15 (b) ln (1 + x2) (c) 

(ch) tan-1 (3x) (d) x2tan x [2], [2], [3], [2], [2]

**5.** Darganfyddwch gyfesuryn x a natur pwynt arhosol y gromlin a roddir gan

y = e2x – x – 1. [6]

**Haf2007**

**6. (a)** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(i) x2sin x

(ii) ln(x2 + 3)

(iii) e9–2x

(iv) 4\_\_\_

 (3x + 7)2

(v) sin–13x [10]

**(b)** O wybod bod y = 1 + tan x (tan x ≠ 1),

 1 – tan x

dangoswch fod dy bob amser yn bositif. [4]

 dx

**Ionawr 2008**

**7.** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(a) ln x

 x²

(b) cos-1 5x

(c) √1 + 6x4

(ch) x3tan2x [3],[2],[2],[3]

**Haf 2008**

**8. (a)** Dangoswch fod gan f(x) = sin-1x – 2x3/2 + 1 werth arhosol pan fydd x yn bodloni

9x3 – 9x + 1 = 0. [4]

**9.** Differwch (a) cot 2x, (b) x2 lnx, (c) x² + 1

 x² - 2

gan symleiddio eich atebion pan fo hyn yn bosibl. [2], [2], [3]

**Ionawr 2009**

**10. (a)** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(i) ln(sin x) (ii) sin–1(4x) (iii) 3x² + 2

 x² + 5 [8]

(b) Trwy yn gyntaf ysgrifennu y = tan–1x fel x = tan y, darganfyddwch yn nhermau x. [4]

**Haf 2009**

**11. (a)** Dangoswch fod gan f(x) = (2x –3)e2x – 4x + 5 werth arhosol pan fydd x yn bodloni (x – 1)e2x – 1 = 0. [6]

**12.** Differwch bob un o’r canlynol mewn perthynas ag x, a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(a) ln (3 + 2x²) (b) x²tan-1x (c) (5 + 7x²)10

[2], [2], [3]

**6 : Trigonometreg**

Yn C2 buom dysgom sin2θ + cos2θ ≡ 1 a .

**Y ffwythiannau trigonometreg cilyddol**

  

**Graffiau Secθ, Cosecθ a Cotθ** Mae angen cofio siâp rhain – gweler eich nodiadau.

Dau unfathiant arall Bwysig dysgu rhain :

tan2θ + 1 = sec2θ 1 + cot2θ = cosec2θ

**Cwestiynau cyn bapur**

**Ionawr 2006**

**1.(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

4cot2θ = 11 – 4cosecθ. [6]

**Haf 2006**

**2.(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

7 – sec2θ = tan2θ + tan θ . [6]

**Ionawr 2007**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

tan2θ + 2secθ = 7. [6]

**Haf 2007**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

cot2θ = 7 – 2cosecθ. [6]

**Ionawr 2008**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

secθ = 1 – 2tan2θ. [6]

**Haf 2008**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

2sec2θ = 8 – tanθ. [6]

**Ionawr 2009**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° ≤ θ ≤ 360° sy’n bodloni

3tan2θ = 7 + secθ. [6]

**Haf 2009**

**2(b)** Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad 0° Xθ X 360° sy’n bodloni

cot2θ – 9 = cosecθ – cosec2θ. [6]

**7 : Differu ymhlyg parametrig**

**Differu Ffwythiannau Ymhlyg**

e.e. Darganfyddwch fynegiad ar gyfer  yn nhermau x ac y ar gyfer:

Ateb: 2x4 – 3x2 + 7y – 3y2 – 7 = 0

 8x3 – 6x + 7 - 6y - 0 = 0

 (7 – 6y) = 6x – 8x3 ->  = 

**Differu Ffwythiant Parametrig**

e.e.

**1**. Mae cromlin wedi ei diffinio gan yr hafaliadau parametrig: x = t2 + 1 ,

y = t3 + t.

Darganfyddwch 

Ateb:  = 3t2 + 1,  = 2t. Gan ddefnyddio  = ÷  ->

 = 

**2.** O wybod bod y = 5 + 3sinθ, x = 5cosθ + 2, darganfyddwch yn nhermau θ.

Ateb: = 3cosθ,  = -5sinθ. Gan ddefnyddio  = ÷ 

  = 

neu -1.6Tanθ

**Ail ddeilliad**

Yn ein gwaith ar ddifferu yn C1, dysgom fel i ddarganfod  a bod e’n cael ei ddefnyddio i benderfynu natur pwyntiau arhosol. Bydd disgwyl i chi fedru darganfod ail ddeilliad hafaliad sydd wedi ei rhoi yn barametrig. Os cofiwch yn ôl i’r gwaith o C1, er mwyn darganfod yr ail ddeilliad, rhaid i ni ddifferu eto.  = 

Pan fydd gennym hafaliadau parametrig, nid yw hyn mor syml, gan ein bod am ddifferu yn ôl x ond bydd ein ateb ar gyfer wedi ei roi yn nhermau t. Er mwyn dod dros y broblem hon byddwn yn differu ein ateb i yn ôl t, ac yn ei luosi gyda 

  =  x 

(Bydd ein  yn hafal i un dros )

**Enghreifftiau**

Mae ffwythiant wedi ei ddiffinio’n barametrig gan x = t4, y = t3 + 1. Darganfyddwch yn nhermau t (a)  (b) .

Ateb:

(a) = 3t2 ,  = 4t3  = ÷  ->  =  = 

(b)  =  x   =  = 

  = x  = – 

**Cwestiynau cyn bapur**

**Ionawr 2006**

**1. (a)** Diffinnir y gromlin C gan

y4 + x3y = x2 + 4x – 3.

Darganfyddwch werth yn y pwynt (2, 1). [4]

**(b)** O wybod bod x = 2t 3, y = 3t 4, darganfyddwch, yn nhermau t,

(i)  (ii)  [4]

**Haf 2006**

**2. (a)** O wybod bod x = cos t, y = sin 2t, darganfyddwch  yn nhermau t. [4]

**(b)** O wybod bod x4 + 2x2y + y2 = 21,

darganfyddwch  yn nhermau x ac y. [4]

**Ionawr 2007**

**3. (a)** O wybod bod x3 + x2y + y4 = 17, darganfyddwch  yn nhermau x ac y. [3]

**(b)** O wybod bod x = t3, y = t2 + 1, darganfyddwch, yn nhermau t,

(i)  (ii)  [6]

**Haf 2007**

**4. (a)** Diffinnir ffwythiant yn baramedrig gan x = 5t2, y = t5 +  .

(i) Darganfyddwch yn nhermau t.

(ii) O wybod bod  = 1, dangoswch fod t3 + 4t – 2 = 0. [5]

**5.** O wybod bod 3y2 + x 2y3 + x4 – x2 – 11 = 0,

 darganfyddwch werth  pan fydd x = 2, y = –1. [4]

**Ionawr 2008**

**6. (a)** O wybod bod x = t4 + 1, y = e2t + 5, darganfyddwch 

yn nhermau t. [4]

**(b)** O wybod bod x4 + siny + x2y3 = 9, darganfyddwch  yn nhermau x ac y. [3]

**Haf 2008**

**7.** O wybod bod x2 + xsiny + y3 = π3 + 1,

darganfyddwch werth  yn y pwynt (1, π). [4]

**8.** O wybod bod x = lnt, y = e2t,

**(a)** dangoswch fod  = 2te2t, [4]

**(b)** darganfyddwch *d2y* yn nhermau t, a symleiddiwch eich ateb. [4]

 *dx2*

**Ionawr 2009**

**9. (a)** O wybod bod x2 + 3xy + 2y2 – 2x = 13, darganfyddwch werth  yn y pwynt (1, 2). [4]

(b) O wybod bod x = 2et + 6, y = 4e2t + 3et + 1, darganfyddwch werth t pan fydd = 6, gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol. [7]

**Haf 2009**

**10. (a)** O wybod bod x3 + y2 + x tan 2y = 8,

darganfyddwch  yn nhermau x ac y. [4]

**(b**) O wybod bod x = 3t + t2 , y = 1 + 4t darganfyddwch

 3 + 2t

(i) *dy* ,

 *dt*

(ii) *d2y* , gan symleiddio eich ateb gymaint ag sydd bosibl. [5]

 d*x2*

**8 : Integru**

 axn dx = axn+1 + c (n ≠ -1) RHEOL I

 n+1

**Ffwythiannau o’r ffurf a(cx + d)n**

 a(cx + d)n dx =  + k RHEOL II

e.e.

1) (4x + 3)5 -> Ateb: dx =  + k

 =  + k

2)  -> Ateb:  dx = dx

 =  + k

 =  + k

 = + k

**Integru 1/x**

 = ln  + k. RHEOL III

 =  ln  + k. RHEOL V

e.e. Integrwch y mynegiadau canlynol:

1.  Ateb:  = ln  + k.

= 3 ln + k

2.  Ateb:  = ln  + k

= -ln  + k

 **Integru ex**

ex dx = ex + k RHEOL VI c.eax+b dx = eax+b + k RHEOL VII

 e.e.

1) dx = e4x + k

2)  =  =  = -5e-6x + k

(neu )

**Integru Sin a Cos**

cos x dx = sin x+ k RHEOL VIII sin x = -cos x + k RHEOL IX

hefyd :

cos (ax + b) dx = sin (ax + b)+ k sin (ax + b) = -cos (ax + b) + k

e.e.

(a) sin 3x dx = -cos 3x + k

(b) 6cos (3x + 7) dx = ()6 sin (3x + 7) + k = 2 sin (3x + 7) + k

(c) sin (5 - x) dx = (-cos (5 - x)) + k = cos (5 – x) + k

**Integru pendant**

 a a

 f’(x) dx = [ f(x) ] = f(a) – f(b)

 b b

e.e. Enrhifwch bob un o’r canlynol:

  4 4 4

 (3x2 + 2x + 5) dx = [ 3x3 + 2x2 + 5x ] = [ x3 + x2 + 5x]

 2 3 2 2

 = (43 + 42 + 5x4) – (23 + 22 + 5x2)

= (64 + 16 + 20) – (8 + 4 + 10)

= 100 – 22

= 78

 2 2

  dx = [ 2ln ]

 -2   -2 3

= [ 2ln 10 ] - [2ln ]

 3 3

= 1.53505 – 0.46209 = 1.07

**Cwestiynau cyn bapur**

**Ionawr 2006**

**1.** (a) Darganfyddwch

(i)  [4]

(ii)  [2]

(b) Enrhifwch  [4]

**Haf 2006**

**2. (a)** (i) Darganfyddwch  dx

(ii) O wybod bod  dx = ½(9 – a)

 dangoswch fod e2a – a – 10 = 0. [4]

**3. (a)** Darganfyddwch (i)  dx [4]

(ii)  dx [4]

(b) Enrhifwch cos 3x dx [4]

**Ionawr 2007**

**4. (a)** Darganfyddwch

(i) dx

(ii)  dx [4]

 2

(b) Enrhifwch \_\_6\_\_\_ dx gan fynegi eich ateb fel logarithm sengl.

 3x + 2 [4]

 0

 π/4

(c) Enrhifwch cos (3x + π/4) dx [4]

 0

Haf 2007

**5. (a)** Darganfyddwch

(i) dx

(ii) (3x + 2)20 dx

**(b)** Enrhifwch e 7x dx [7]

 π/3

**(c)** Enrhifwch cos (3x + π/3) dx [4]

 0

Ionawr 2008

**6. (a)** Darganfyddwch

(i) √2x + 3 dx

(ii) \_\_3\_\_ dx

 7x + 2

**(b)** Enrhifwch 5e 2x - 7 dx

 [6]

 π/3

**(c)** Enrhifwch sin (4x + π/6) dx [4]

 π/6

Haf 2008

**7. (a)** Darganfyddwch

(i) sin 3x dx

(ii) \_\_2\_\_ dx

 3x + 5

(iii) e 3x + 4 dx

 [6]

 1

**(b)** Enrhifwch \_\_\_1\_\_\_ dx [4]

 (2x + 1)4

  0

Ionawr 2009

**8. (a)** Darganfyddwch

(i) \_\_7\_\_ dx

 6x + 5

(ii) cos 5x dx [4]

 1

(b) Enrhifwch \_\_\_9\_\_\_ dx [4]

 (2x + 1)2

  0

Haf 2009

**9. (a)** Darganfyddwch

(i) \_\_3\_\_\_ dx

 (2x + 7)3

(ii) sin 5x dx [4]

 3

(b) Enrhifwch \_\_2\_\_ dx [4]

 0 5x + 3

**9 : Profi**

**Gwrthbrofi trwy ddefnyddio gwrthenghraifft**

e.e. Mae myfyriwr yn tybio bod sin(θ1 + θ2) ≡ sin θ1 + sinθ2

yn gywir ar gyfer unrhyw ddwy ongl θ1 a θ2.

Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos bod y dybiaeth yn anghywir.

 Ateb: Gallwch ddewis llawer iawn o rifau a fyddai’n profi’r dybiaeth yn anghywir.

 Rwy’n dewis i θ1 = 30o a θ2 = 60o. Felly bydd θ1 + θ2 = 90o.

 sin(θ1 + θ2) = sin 90o = 1

 sin θ1 = sin 30o = ½ a sin θ2 = sin 60o = 

 Nid yw  +  = 1 felly nid yw’r dybiaeth yn wir.

**Cwestiynau Cyn bapur**

Dilynwch y dull a ddefnyddiwyd yn yr enghreifftiau uchod, sef dewis set o rifau a gweld a ydynt yn dilyn y dybiaeth. Os nad ydynt yn dilyn y dybiaeth rydych wedi profi’r dybiaeth yn anghywir. Os yw’r set o rifau yn dilyn y dybiaeth, dewiswch set arall o rifau, a pharwch i wneud hyn hyd nes y byddwch yn cael set sy’n gwrthbrofi’r dybiaeth.

**1.** Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos bod y gosodiad

cos (a + b) ≡ cos a + cos b yn anghywir. [2]

**2.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

tan2θ ≡ 2 tanθ yn anghywir. [2]

**3.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

cos3θ ≡ 3cos3θ – 4cosθ yn anghywir. [2]

**4.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

cos 2θ ≡ 1- 2cos2θ yn anghywir. [2]

**5.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

sin3θ ≡ 4sinθ – 3sin3θ yn anghywir. [2]

**6.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

tan2θ ≡  yn anghywir. [2]

**7.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

cos2θ ≡ 2cos2θ – sin2θ yn anghywir. [2]

**8.** Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

cosθ + cos3θ ≡ 2cos2θ cos4θ yn anghywir. [2]

**10 : Dulliau rhifiadol**

**I) Dangos fod gwreiddyn yn bresennol rhwng dau rhif**

Mae’n rhaid amnewid y dau rhif mewn i’r hafaliad. Os mae newid mewn arwydd mae’n profi bod gwreiddyn yn bresennol.

e.e. Dangoswch fod gan ex + 2x – 3 = 0 wreiddyn rhwng x = 0.5

 ac x = 0.6

Pan x = 0.5 : e0.5 + 2(0.5) – 3 = -0.351....

Pan x = 0.6 : e0.6 + 2(0.6) – 3 = 0.022....

Felly, mae gwreiddyn rhwng x = 0.5 ac x = 0.6 oherwydd mae’r arwydd yn newid.

**II) Y Dull Iterus**

Mae’r dull iteru yn ddull y defnyddir i gael brasamcan o ddatrysiad hafaliad.

e.e. Defnyddiwch y fformiwla iterus xn+1 =  gyda gwerth dechreuol x0 = 1.8 i ddarganfod α.

Cyfrifwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3. Ysgrifennwch werth x3 yn

gywir i dri lle degol a phrofwch mai hwn yw gwerth α yn gywir i dri lle degol.

Ateb :

 xn+1 =  , x0 = 1.8

 x1 = ½(3 + ln 1.8) = 1.793893332

 x2 = ½(3 + ln 1.793...) = 1.792194152

 x3 = ½(3 + ln 1.792...) = 1.791720326

 Felly i 3 lle degol: x3 = 1.792

Amnewid 1.7915 ac 1.7925 :

 f(1.7915) = 2(1.7915) – 3 - ln 1.7915 = -0.000053

 f(1.7925) = 2(1.7925) – 3 - ln 1.7925 = 0.001389

Gan fod yna newid arwydd rhwng y ddau, mae hyn yn profi mai’r ateb i 3 lle degol yw 1.792.

**Cwestiynau cyn bapur**

Ionawr 2006

**1. (b)** Dangoswch fod i’r hafaliad 4x3 + 10x – 1 = 0 wreiddyn α rhwng 0 ac 1.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol

 

gydag x0 = 0·1 i ddarganfod α. Cyfrifwch a chofnodwch werthoedd x. Ysgrifennwch werth x3 yn gywir i chwe lle degol a dangoswch mai hwn yw gwerth α yn gywir i chwe lle degol. [7]

Haf 2006

**2. (b)** Dangoswch fod i’r hafaliad e2a – a – 10 = 0 wreiddyn α rhwng 1 a 2.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol

 an+1 = ½ln(an + 10)

gydag a0 = 1·2, i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd a1, a2, a3, a4.

Ysgrifennwch werth a4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

Ionawr 2007

**3.** Dangoswch fod i’r hafaliad

cos x + 2x – 2 = 0 wreiddyn α rhwng 0 a π/2.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol

 xn + 1 = 1 – ½cos xn

gydag x0 = 0·5, i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3, x4. Ysgrifennwch werth x4 yn gywir i dri lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i dri lle degol. [7]

Haf 2007

**4.(b)** Dangoswch fod i’r hafaliad t3 + 4t – 2 = 0 wreiddyn α rhwng 0 ac 1.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol tn+1 = 2 – tn3

 4

gyda t0 = 0·5 i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd t1, t2, t3, t4. Ysgrifennwch werth t4 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [7]

Ionawr 2008

**5.** Dangoswch fod i’r hafaliad 2ln(70 + x) – x = 0 wreiddyn α rhwng 8 a 9.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol xn+1 = 2ln(70 + xn )

gydag x0 = 8·8 i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3.

Ysgrifennwch werth x3 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [7]

Haf 2008

**6.(b)** Dangoswch fod i’r hafaliad 9x3 – 9x + 1 = 0 wreiddyn α rhwng 0 a 0·2.

Gellir defnyddio’r berthynas gylchol xn+1 = xn3 + 1/9

gydag x0 = 0·1 i ddarganfod α.

Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3. Ysgrifennwch werth x3 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

Ionawr 2009

**7. (a)** Trwy fraslunio graffiau y = x 3 ac y = 4 – x, darganfyddwch nifer gwreiddiau real yr hafaliad

 x3 + x – 4 = 0. [3]

 **(b)** Gallwch dybio bod i’r hafaliad x 3 + x – 4 = 0 wreiddyn α rhwng 1 a 2. Mae’n bosibl defnyddio’r berthynas gylchol xn+1 = (4 – xn)1/3

gydag x0 = 1·4 i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3, x4. Ysgrifennwch werth x4 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol.

Haf 2009

**8(b)** Dangoswch fod i’r hafaliad (x – 1)e2x – 1 = 0 wreiddyn α rhwng 1 a 2.

Mae’n bosibl defnyddio’r berthynas gylchol xn+1 = 1 + 

gydag x0 = 1·1 i ddarganfod α. Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x1, x2, x3. Ysgrifennwch werth x3 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai’r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [7]

**11 : Rheol Simpson**

Defnyddiwn y Rheol Simpson i ddarganfod bras werth ar gyfer integriad. Mae’r rheol yn y llyfryn fformiwla.

Rheol Simpson:

 b

 y dx ≈ h { (y0 + yn) + 4(y1 + y3 + ... + yn-1) + 2(y2 + y4 + ... + yn-2)}

 lle mae h =  ac mae n yn eilrif

Er mwyn defnyddio’r fformwla hon, byddwch yn dilyn yr un strwythur ac y gwnaethoch gyda rheol y Trapesiwm.

e.e.

Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer

  dx

 Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

**Ateb**: Mae 5 mesuryn felly nifer y stribedi n = 4.

h =  =  = 0.25

Nawr, rydym yn cyfrifo ein gwerthoedd ‘y’

x0 = 1 -> y0 =  = 2

x1 = 1.25 -> y1 =  = 2.225561727

x2 = 1.5 -> y2 =  = 2.52487235

x3 = 1.75 -> y3 =  = 2.891258377

x4 = 2 -> y4 =  = 3.31662479

 Rheol Simpson:

 b

 y dx ≈ h { (y0 + yn) + 4(y1 + y3 + ... + yn-1) + 2(y2 + y4 + ... + yn-2) }

 a

 dx ≈ 1/3 { (2 + 3.31662479) + 4(2.225561727 + 2.891258377) + 2(2.52487235)}

 = 10.278 ( i 3 lle degol)

(Dylech sylwi ein bod wedi ysgrifennu bob ateb i’r gwerthoedd ‘y’ yn llawn er mwyn sicrhau ein bod yn cael ateb mor fanwl gywir a phosibl).

**Cwestiynau cyn bapur**

**1.** Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer

  dx

 Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

**2.** Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer

  dx

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

**3.** Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer:

  dx

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

4. Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer:

  dx

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i bedwar lle degol. [4]

**5. (a)** Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer

 ln (sin x) dx

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i bedwar lle degol.

**(b)** Diddwythwch fras werth ar gyfer ln (sin2x) dx [5]

**6. (a)** Defnyddiwch Reol Simpson gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer:

 ln(1 + x2) dx

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

 **(b)** Defnyddiwch eich ateb i (a) i ddiddwytho bras werth ar gyfer

  dx [1]